

# 線性規劃期末報告

指導教授  
潘浙楠

組員

H24979057 劉佩姍

H24979015 巫季縈



# 目錄

題目.....03

流程圖.....04

Question 1.....05

Question 2.....08

結論.....11



# 福和紙公司

福和紙公司供應美國南部的用紙，公司生產多種不同的商業用紙，以及一般用紙，交由供應商銷售。公司每個月都會預估需求，並依此作生產規劃。

公司的產品之一是捲軸紙，供收銀機、機器、電腦，以及其他用途使用。在製造過程中，公司事先生產出一捲捲長 200 呎、寬 10 吋的紙捲，之後，在依據不同的用途，利用機器切割成不同寬度的捲軸。主要的尺寸有三種：1.5 吋、2 吋、以及 2.5 吋。多出的部份會變成廢紙，送資源回收廠回收，對公司而言，這是一項成本。

公司有七部不同的切割機器，切割方式如下：

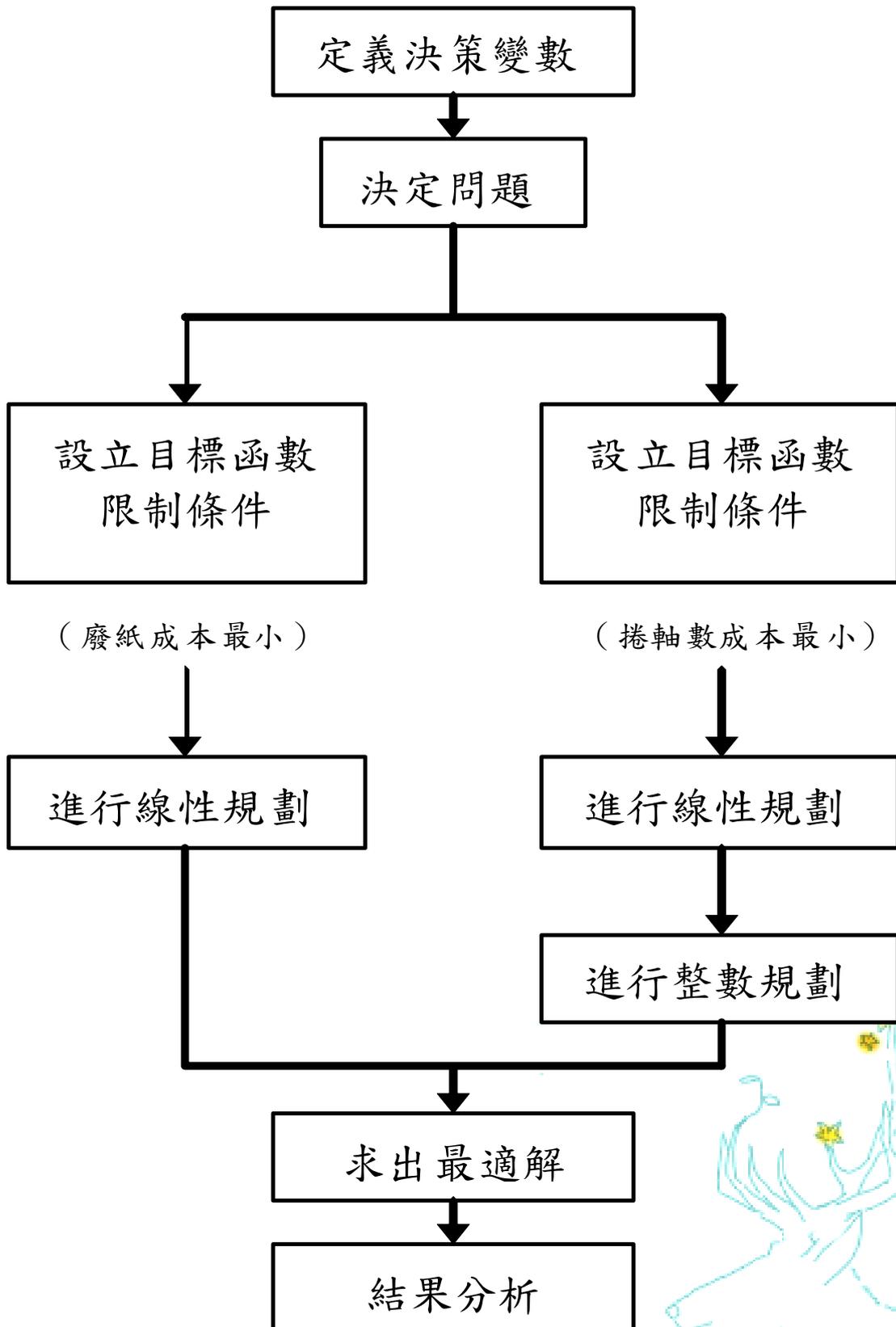
機器	切割方式			
	1.5 吋寬	2 吋寬	2.5 吋寬	廢紙
1	0	0	4	0
2	0	5	0	0
3	6	0	0	1
4	2	1	2	0
5	4	2	0	0
6	2	2	1	0.5
7	0	2	2	1

例如：如果利用第六部機器進行切割一捲 10 吋寬的捲軸，會切割出 2 捲 1.5 吋寬的捲軸，2 捲 2 吋寬的捲軸，1 捲 2.5 吋寬的捲軸以及 0.5 吋寬的廢紙。

下個月的預估需求如下：**1.5 吋寬的 2300 捲**、**2 吋寬的 800 捲**、**2.5 吋寬的 2000 捲**。公司經理的目標市要在最小成本的錢提下滿族需求。經理人希望先解決二個問題：第一，是在使廢紙成本最小的前提下，每一部機器分別要切割多少捲 10 吋寬的捲軸紙？第二，在所需 10 吋捲軸數目最小的前提下，每一部機器分別要切割多少捲 10 吋寬的捲軸紙？

案例來源：作業研究 / Michael E. Hanna 著；李茂興譯 p.153

# 流程圖



### Question 1 :

在使廢紙成本最小的前提下，每一部機器分別要切割多少捲10吋寬的捲軸紙？

### 決策變數

$X_i$  = 第  $i$  台機器進行切割之捲軸數  
 $i=1, 2, 3, \dots, 7$

### 限制條件

廢紙最小成本 =  $X_3 + 0.5X_6 + X_7$

$$\text{S. T. } \begin{cases} 0X_1 + 0X_2 + 6X_3 + 2X_4 + 4X_5 + 2X_6 + 0X_7 \geq 2300 \\ 0X_1 + 5X_2 + 0X_3 + X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 2X_7 \geq 800 \\ 4X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 2X_4 + 0X_5 + X_6 + 2X_7 \geq 2000 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 0 \end{cases}$$

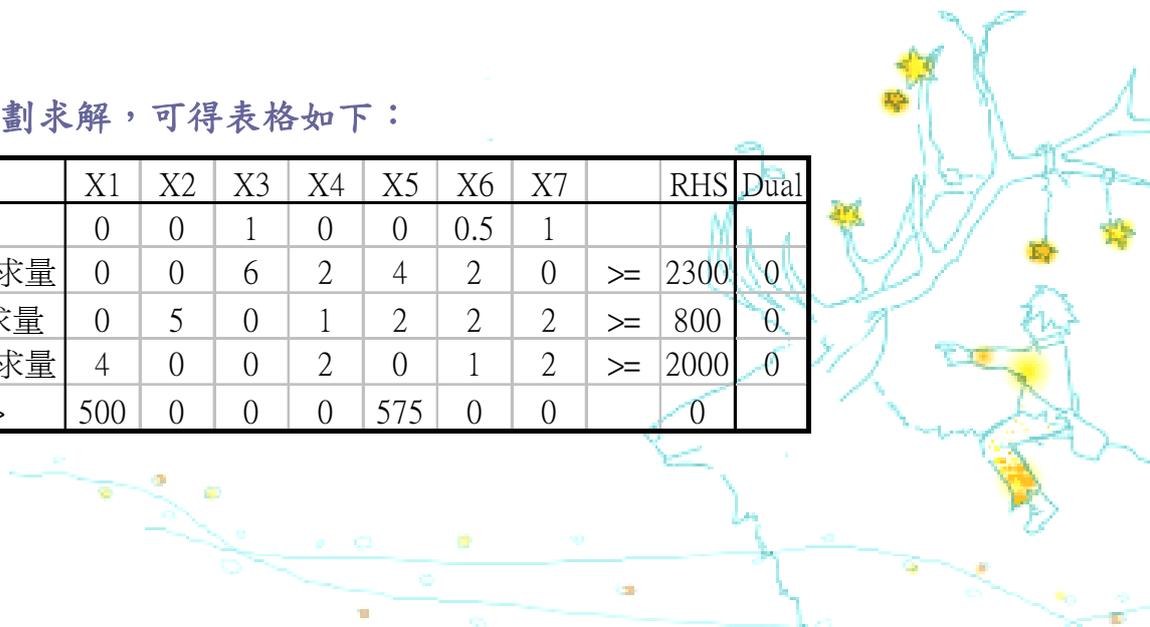
### 資料表格 & 求解表格

將資料輸入於QM軟體中，可得表格如下：

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	RHS	Equation form
Minimize	0	0	1	0	0	0.5	1		Min $X_3 + 0.5X_6 + X_7$
1.5吋寬的需求量	0	0	6	2	4	2	0	$\geq 2300$	$6X_3 + 2X_4 + 4X_5 + 2X_6 \geq 2300$
2吋寬的需求量	0	5	0	1	2	2	2	$\geq 800$	$5X_2 + X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 2X_7 \geq 800$
2.5吋寬的需求量	4	0	0	2	0	1	2	$\geq 2000$	$4X_1 + 2X_4 + X_6 + 2X_7 \geq 2000$

進行線性規劃求解，可得表格如下：

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7		RHS	Dual
Minimize	0	0	1	0	0	0.5	1			
1.5吋寬的需求量	0	0	6	2	4	2	0	$\geq$	2300	0
2吋寬的需求量	0	5	0	1	2	2	2	$\geq$	800	0
2.5吋寬的需求量	4	0	0	2	0	1	2	$\geq$	2000	0
Solution->	500	0	0	0	575	0	0		0	



進行線性規劃後可得：

$$\begin{cases} X_1 = 500 \\ X_5 = 575 \end{cases}$$

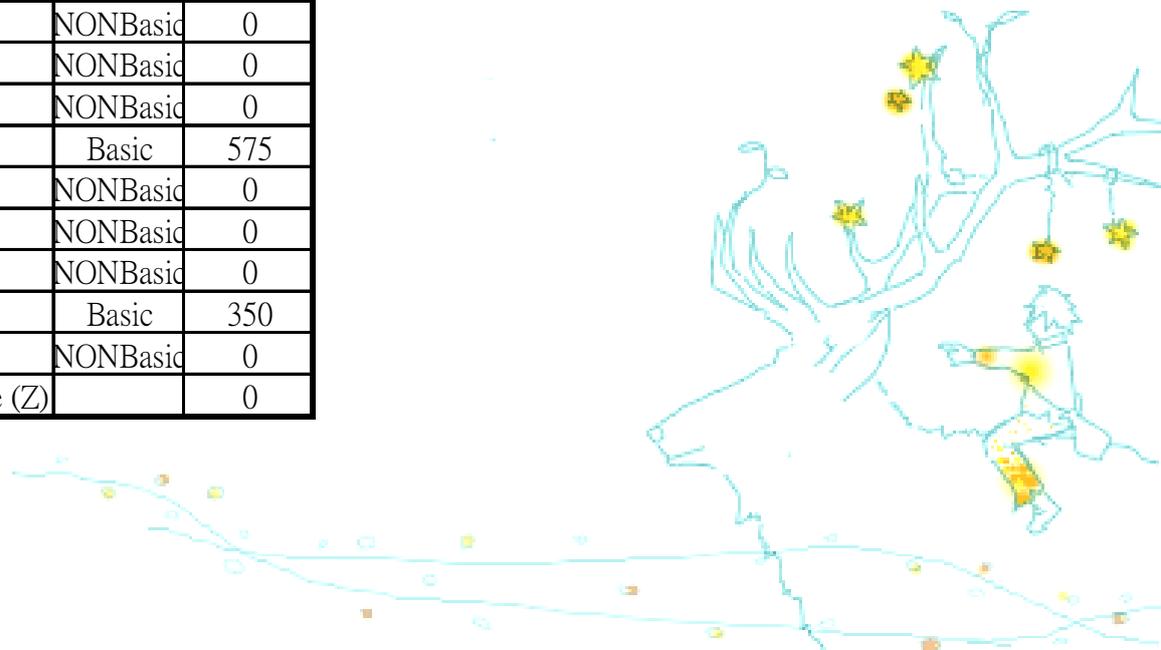
$$Z = 0$$

即表示第一台機器切割 500 捲捲軸紙，第五台機器切割 575 捲捲軸紙，此時可使廢紙成本最小，總卷軸數目為 1075 捲。

### 敏感度分析

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	500	0	0	0	0
X2	0	0	0	0	Infinity
X3	0	1	1	0	Infinity
X4	0	0	0	0	Infinity
X5	575	0	0	0	0
X6	0	0.5	0.5	0	Infinity
X7	0	1	1	0	Infinity
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
1.5 吋寬的需求量	0	0	2300	1600	Infinity
2 吋寬的需求量	0	350	800	-1600	1150
2.5 吋寬的需求量	0	0	2000	0	Infinity

Variable	Status	Value
X1	Basic	500
X2	NONBasic	0
X3	NONBasic	0
X4	NONBasic	0
X5	Basic	575
X6	NONBasic	0
X7	NONBasic	0
surplus 1	NONBasic	0
surplus 2	Basic	350
surplus 3	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		0



剩餘變數：大於或等於的限制式中，右手邊係數被超過的部份。  
(Surplus)

由表中得知：

$$\begin{aligned}\text{第二條限制式之剩餘變數} &= 2 \text{ 吋寬的捲軸實際生產的數目扣掉需要量之部分} \\ &= 575 * 2 - 800 = 350\end{aligned}$$

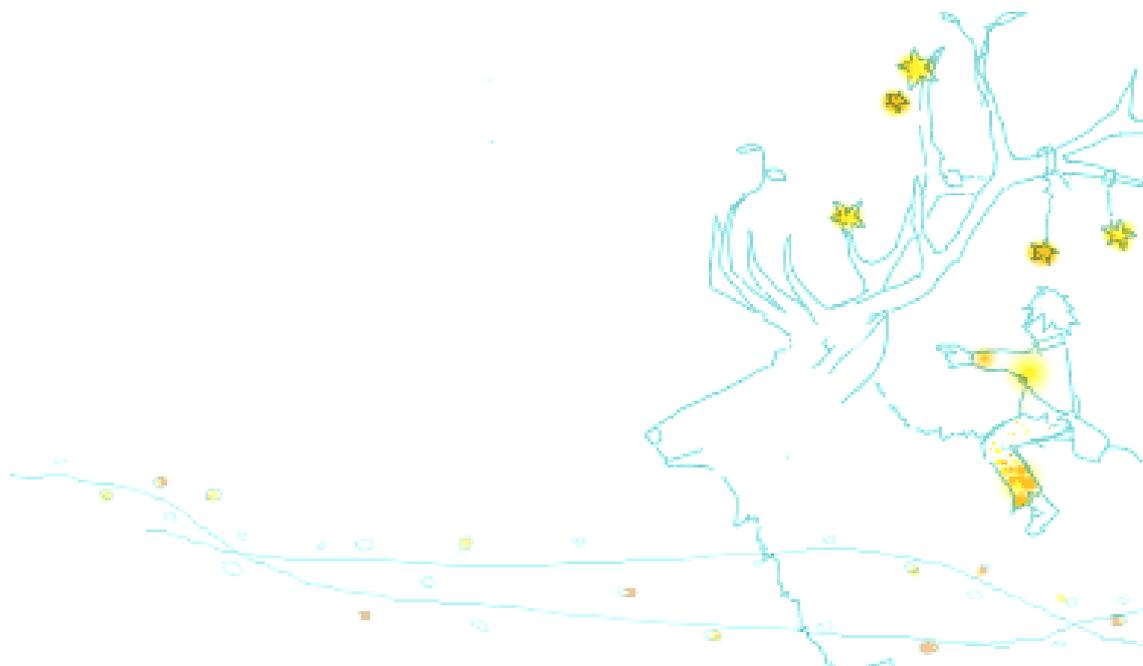
### @目標函數係數改變而不影響最佳解

由  $X_2, X_3, X_4, X_6, X_7$  之目標函數係數範圍欄，可以看出這幾台機器之廢紙吋數容許增加之範圍皆為無限大。在這個範圍內，最適解仍然不會改變，唯一會改變的只有目標函數的最適值。此效果只是使虛值增加。

### @限制式之右手邊係數改變而不影響淨利

1. 「1.5 吋寬的需求量」這條限制式之右手邊係數，可增加之上限範圍為無限大，可減少之下限為 1600 捲。
2. 「2 吋寬的需求量」這條限制式之右手邊係數，可增加之上限範圍為 1150 捲，可減少之下限為 -1600 捲。
3. 「2.5 吋寬的需求量」這條限制式之右手邊係數，可增加之上限範圍為無限大。

當各種寬度的捲軸之需求量在範圍內變動時，其他值會隨著限制式而改變，造成總利潤變動，但不影響淨利。



## Question 2 :

在所需 10 吋捲軸數目最小的前提下，每一部機器分別要切割多少捲 10 吋寬的捲軸紙？

### 決策變數

$$X_i = \text{第 } i \text{ 台機器進行切割之捲軸數}$$

$$i=1, 2, 3, \dots, 7$$

### 限制條件

$$\text{廢紙最小成本} = X_3 + 0.5X_6 + X_7$$

$$\text{S. T.} \begin{cases} 0X_1 + 0X_2 + 6X_3 + 2X_4 + 4X_5 + 2X_6 + 0X_7 \geq 2300 \\ 0X_1 + 5X_2 + 0X_3 + X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 2X_7 \geq 800 \\ 4X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 2X_4 + 0X_5 + X_6 + 2X_7 \geq 2000 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 0 \end{cases}$$

### 資料表格 & 求解表格

將資料輸入於 QM 軟體中，可得表格如下：

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	RHS	Equation form
Minimize	1	1	1	1	1	1	1		Min $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$
1.5吋寬的需求量	0	0	6	2	4	2	0	$\geq 2300$	$6X_3 + 2X_4 + 4X_5 + 2X_6 \geq 2300$
2吋寬的需求量	0	5	0	1	2	2	2	$\geq 800$	$5X_2 + X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 2X_7 \geq 800$
2.5吋寬的需求量	4	0	0	2	0	1	2	$\geq 2000$	$4X_1 + 2X_4 + X_6 + 2X_7 \geq 2000$

進行線性規劃求解，可得表格如下：

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	RHS	Dual
Minimize	1	1	1	1	1	1	1		
1.5吋寬的需求量	0	0	6	2	4	2	0	$\geq 2300$	-0.17
2吋寬的需求量	0	5	0	1	2	2	2	$\geq 800$	-0.17
2.5吋寬的需求量	4	0	0	2	0	1	2	$\geq 2000$	-0.25
Solution->	500	0	116.7	0	400	0	0	1016.7	

★由於捲軸數必為整數，所以需再進行整數規劃，使其最適解為整數。

進行整數規劃，可得表格如下：

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	RHS	Equation form
Minimize	1	1	1	1	1	1	1		Min $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$
1.5吋寬的需求量	0	0	6	2	4	2	0	$\geq 2300$	$6X_3 + 2X_4 + 4X_5 + 2X_6 \geq 2300$
2吋寬的需求量	0	5	0	1	2	2	2	$\geq 800$	$5X_2 + X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 2X_7 \geq 800$
2.5吋寬的需求量	4	0	0	2	0	1	2	$\geq 2000$	$4X_1 + 2X_4 + X_6 + 2X_7 \geq 2000$
Variable type	Integer								
Solution->	500	0	116	0	401	0	0		Optimal Z-> 1017

進行整數規劃後可得如下：

$$\begin{cases} X_1 = 500 \\ X_3 = 116 \\ X_5 = 401 \end{cases}$$

$$Z = 1017$$

即表示第一台機器切割 500 捲捲軸紙，第三台機器切割 116 捲捲軸紙，第五台機器切割 401 捲捲軸紙，此時可使切割之捲軸數目為 1017 捲，達到最小。

### 敏感度分析

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	500	0	1	0	1
X2	0	0.1667	1	0.8333	Infinity
X3	116.6667	0	1	0.9	1.5
X4	0	0	1	1	Infinity
X5	400	0	1	0.6667	1
X6	0	0.0833	1	0.9167	Infinity
X7	0	0.1667	1	0.8333	Infinity
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
1.5吋寬的需求量	-0.1667	0	2300	1600	Infinity
2吋寬的需求量	-0.1667	0	800	0	1150
2.5吋寬的需求量	-0.25	0	2000	0	Infinity

Variable	Status	Value
X1	Basic	500
X2	NONBasic	0
X3	Basic	116.6667
X4	NONBasic	0
X5	Basic	400
X6	NONBasic	0
X7	NONBasic	0
surplus 1	NONBasic	0
surplus 2	NONBasic	0
surplus 3	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		1016.667

### @目標函數係數改變而不影響最佳?

由目標函數係數範圍欄，可以看出：

1. 第一台機器之單位容許由目前 1 單位至多增加 1 單位。
2. 第二台機器之單位容許增加範圍為無限大，至少減少 0.833 單位。
3. 第三台機器之單位容許由目前 1 單位至多增加 1.5 單位，至少減少 0.9 單位。
4. 第四台機器之單位容許增加之範圍為無限大，至少減少 1 單位。
5. 第五台機器之單位容許由目前 1 單位至多增加 1 單位，至少減少 0.667 單位。
6. 第六台機器之單位容許增加之範圍為無限大，至少減少 0.917 單位。
7. 第七台機器之單位容許增加之範圍為無限大，至少減少 0.833 單位。

在這個範圍內，最適解仍然不會改變，唯一會改變的只有目標函數的最適值。



### @限制式之右手邊係數改變而不影響淨利

1. 「1.5 吋寬的需求量」這條限制式之右手邊係數可增加之上限範圍為無限大，可減少之下限為 1600 捲；當此寬度之需求量在範圍內變動時，每單位的變動將引起總捲軸數變動-0.167 捲。
2. 「2 吋寬的需求量」這條限制式之右手邊係數可增加之上限範圍為 1150 捲；當此寬度之需求量在範圍內變動時，每單位的變動將引起總捲軸數變動-0.167 捲。
3. 「2.5 吋寬的需求量」這條限制式之右手邊係數可增加之上限範圍為無限大；當此寬度之需求量在範圍內變動時，每單位的變動將引起總捲軸數變動-0.25 捲（也就是\*對偶價 Dual Price），此時其他值會隨著限制式而改變，造成總利潤變動，但不會影響淨利。

\*對偶價：當這一條限制式右邊的值變動依單位時，目標含數值所隨之變動的量。  
(Dual Price)

## 結論

### 比較兩種不同目標所得之結論：

- 1、使廢紙成本最小為前提下，總卷軸數目為 1075 捲。
- 2、使捲軸數目最小為前提下，總卷軸數目為 1017 捲。

所以，站在公司立場，我們會建議公司以捲軸數目最小為目標，能使公司獲得較大的利益。

★ ~ The End ~ ★